Numerical radius operator space (Advanced Study of Applied Functional Analysis and Information Sciences)

AUTHOR(S):

渚, 勝

CITATION:

渚, 勝. Numerical radius operator space (Advanced Study of Applied Functional Analysis and Information Sciences). 数理解析研究所講究録 2005, 1452: 160-167

ISSUE DATE:

2005-10

URL:

http://hdl.handle.net/2433/47765

数理解析研究所講究録 1452 巻 2005 年 160-167

Numerical radius operator space

千葉大学理学部　諸　勝 (Masaru Nagisa)
Department of Mathematics and Informatics,
Faculty of Science, Chiba University

この結果は群馬大学教育学部伊藤隆氏との共同研究です.

ヒルベルト空間上の有界線形作用素がなす環として C*-環, von Neumann 環の研究が進展してきた. 抽象的には Banach *-環でいくつかの条件を満たすものとして C*-環, W*-環が定義され, それらは適当なヒルベルト空間上の有界線形作用素が作る環と同相な同形写像を持つという事実はよく知られている (GNS 表現, 境の定理). この流れの研究として, 核型 C*-環, 単射的 W*-環の研究の中から 1970 年代には Choi-Effros による行列順序を持つ*-線形空間の表現定理 (Operator system の理論) が得られ, 1980 年代には完全有界写像の研究に伴って Ruan による行列ノルムを持つ線形空間の表現定理 (Operator space の理論) が得られた.

ここでは Operator space の概念を広げた Numerical radius operator space の概念を導入し, その表現定理を示す. 証明の流れとしては多くの部分が Operator space の議論と同じようにできるが, Numerical radius operator space は Operator space より弱い条件であること, Numerical radius operator space の表現定理から Ruan による Operator space の表現定理が導けるので, ここでは Effros-Ruan の本に則って Numerical radius operator space の表現定理の証明について述べる.

Operator space のモデルは $B(H)$ の部分空間で, そのノルムの構造に着目したものである. Numerical radius operator space のモデルも $B(H)$ の部分空間で, 数域半径

$$w(a) = \sup\{|(a\xi, \xi)| \mid \xi \in H, \|\xi\| = 1\}$$

の構造に着目したものである. $B(H)$ の元を要素に持つ行列 $M_n(B(H))$ は直和 H^n 上の有界線形作用素全体 $B(H^n)$ と同一視できるから, $M_n(B(H))$ に自然に作用素ノルム, 数域半径を定義することができる. ノルムと数域半径の関係として

$$a = a^* \Rightarrow w(a) = \|a\|$$
$$w(a) \le \|a\| \le 2w(a)$$
$$\|a\| = 2w\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

が知られている. 最後の事実は Holbrook の定理として知られている.

上のモデルをもとに抽象的に Operator space と Numerical radius operator space の定義を与えることにする.

定義 X をノルム空間とする. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $M_n(X)$ にノルム $\mathcal{O}_n$ が存在し次の 2 条件を満たすとき $(X, \mathcal{O}_n)$ を **Operator space** という.

(OI) $\mathcal{O}_{m+n}(x \oplus y) = \max\{\mathcal{O}_m(x), \mathcal{O}_n(y)\}$,

(OII) $\mathcal{O}_n(\alpha x \beta) \le \|\alpha\|\|\beta\|\mathcal{O}_m(x)$

ここで $x \in M_m(X), y \in M_n(Y), \alpha \in M_{nm}, \beta \in M_{mn}$.

各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $M_n(X)$ にノルム $\mathcal{W}_n$ が存在し次の 2 条件を満たすとき $(X, \mathcal{W}_n)$ を **Numerical radius operator space** という.

(WI) $\mathcal{W}_{m+n}(x \oplus y) = \max\{\mathcal{W}_m(x), \mathcal{W}_n(y)\}$,

(WII) $\mathcal{W}_n(\alpha x \alpha^*) \leq \|\alpha\|^2 \mathcal{W}_m(x)$

ここで $x \in M_m(X), y \in M_n(X), \alpha \in M_{nm}$.

定義より明らかに Operator space の構造は Numerical radius operator space の構造を与えているということができる. **Ruan** の定理とは, Operator space $(X, \mathcal{O}_n)$ はヒルベルト空間 H 上の有界線形作用素の線形部分空間として実現でき, $B(H^n)$ のノルムとノルム $\mathcal{O}_n$ が等しくなることを主張している.

Numerical radius operator space $(X, \mathcal{W}_n)$ に対してノルム

$$\mathcal{O}_n^w(x) = 2\mathcal{W}_{2n}\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

を定義すると, このノルムは (OI), (OII) を満たすことが確かめられる. つまり Operator space の構造が定まるので Ruan の定理により $(X, \mathcal{O}_n^w)$ を適当な $B(H)$ に表現することができる. しかし我々の目標は X を $B(H)$ に表現し, $B(H^n)$ の数域半径と $\mathcal{W}_n$ を等しくすることである.

Main Theorem. $(X, \mathcal{W}_n)$ を Numerical radius operator space とする. このとき線形写像 $\Phi : X \to B(H)$ で任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$w_n(\Phi_n([x_{ij}])) = w_n([\Phi(x_{ij})]) = \mathcal{W}_n([x_{ij}])$$

となるものが存在する.

このとき自動的に

$$\|\Phi_n([x_{ij}])\|_n = \|[\Phi(x_{ij})]\|_n = \mathcal{O}_n^w([x_{ij}])$$

が成立する.

定理の前半が示されれば後半は以下のように示せる. $x \in M_n(X)$ とする.

$$\begin{aligned} \|\Phi_n(x)\|_n &= 2w_{2n}(\Phi_{2n}\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) \\ &= 2\mathcal{W}_{2n}\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \mathcal{O}_n^w(x) \end{aligned}$$

となる.

また Operator space $(X, \mathcal{O}_n)$ に対してノルム $\mathcal{W}_n$ を

$$\mathcal{W}_n(x) = \frac{1}{2}\mathcal{O}_n(x) \qquad x \in M_n(X)$$

で定義すると $(X, \mathcal{W}_n)$ は Numerical radius operator space と考えることができる．このとき $\mathcal{W}_n$ から定まるノルム $\mathcal{O}_n^w$ は (OI),(OII) の性質を用いると元のノルムと一致することが確かめられる．実際,

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_n^w(x) &= 2\mathcal{W}_{2n}\begin{pmatrix}0 & x\\ 0 & 0\end{pmatrix}\\ &= \mathcal{O}_{2n}\begin{pmatrix}0 & x\\ 0 & 0\end{pmatrix}\\ &= \mathcal{O}_n(x)\end{aligned}$$

最後の変形に関係式

$$\begin{pmatrix}0 & x\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} x \begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & x\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$

を用いればよい．従って定理から $(X, \mathcal{W}_n)$ の表現を構成できれば, 後半の命題から $(X, \mathcal{O}_n)$ が表現できたことになる．つまり系として Ruan の定理が示せたことになる．

すでに注意したように Operator space は Numerical radius operator space でもある．この逆は必ずしも成立しない．実際, 数域半径による Numerical radius operator space を考察すると

$$1 = w(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}) > w\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} \| \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} \| = 1/2$$

となり (OII) を満たさないことがわかる．

また $X = \mathbb{C}1_H$ は $B(H)$ の部分空間であり, ノルムに関して Operator space, 数域半径に関して Numerical radius operator space の構造を持っている．ここで

$$X \ni a1_H \mapsto a1_H \otimes \begin{pmatrix}0 & \cos\theta\\ 0 & \sin\theta\end{pmatrix} \in B(H \otimes \mathbb{C}^2)$$

$(0 \leq \theta \leq \pi)$ とし X に $B(H \otimes \mathbb{C}^2)$ のノルムを考える．このときノルムに変化はなく X は元と同じ Operator space の構造を持つことになる．しかし X に $B(H \otimes \mathbb{C}^2)$ の数域半径を考えると各 θ に対して異なる数域半径を持ち, 元の X とは異なる Numerical radius operator space の構造を持つことになる．

このことから, 一般的に Operator space $(X, \mathcal{O})$ に対して

$$\mathcal{O}_n(x) = 2\mathcal{W}_{2n}\begin{pmatrix}0 & x\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

を満たす Numerical radius operator space $(X, \mathcal{W})$ が数多く存在することが予想できる．実際, 上の条件を満たす Numerical radius operator space で最大のもの, 最小のものが存在し, そしてその間に非可算無限個の異なる構造が存在することなどが証明できる．これらの話題は論文 [1] を参照していただきたい．Main Theorem の証明は多くの部分が Ruan の定理と同じように議論が進むので, 論文では粗筋を述べている．ここでは, 少し丁寧に述べることにする．

既に述べたように証明については Effros-Ruan の本にある Ruan の定理の証明の筋に沿ってすすめていくことにする.

まず初めに Alfsen による Hahn-Banach の定理の変形版を紹介する.

補題 ([2:Lemma 2.3.1]) E を位相線形空間, K を E の compact convex subset とする. K 上の実数値連続アファイン関数の中の cone $\mathcal{E}$ が任意の $e \in \mathcal{E}$ に対して $e(k_e) \geq 0$ となる $k_e \in K$ を持つならば, すべての $e \in \mathcal{E}$ に対して

$$e(k_0) \geq 0$$

となる $k_0 \in K$ を選ぶことができる.

この補題を用いて次の補題を証明する.

補題 $(X, \mathcal{W})$ を Numerical radius operator space とする. $f \in M_n(X)^*$ が

$$\mathcal{W}_n^*(f) = \sup\{|f(x)| \mid x \in M_n(X), \mathcal{W}_n(x) = 1\} = 1$$

であるならば

$$|f(\alpha x \alpha^*)| \leq p_0(\alpha\alpha^*)\mathcal{W}_r(x)$$

$(r \in \mathbb{N}$, $\alpha \in M_{n,r}$, $x \in M_r(X))$ となる $p_0 \in S(M_n)$ が存在する. ここで $S(M_n)$ は M_n 上の state の全体 (M_n 上の unital positive linear functionals の全体).
証明 $\mathcal{W}_r(x) = 1$ となる $x \in M_r(X)$ と $\alpha \in M_{n,r}$ に対して

$$p_0(\alpha\alpha^*) \geq \mathrm{Re} f(\alpha x \alpha^*)$$

となる $p_0 \in S(M_n)$ の存在を示せば良い.

位相線形空間 E として $M_n(X)^*$, E の compact convex subset K として $S_n = S(M_n)$, K 上の実数値連続アファイン関数 $A(K)$ の部分集合 $\mathcal{E}$ として次の形の関数達を考える. $r \in \mathbb{N}$, $\alpha \in M_{n,r}$, $x \in M_r(X)$ with $\mathcal{W}_r(x) = 1$ に対して $e_{\alpha,x} \in A(K)$ を

$$e_{\alpha,x}(p) = p(\alpha\alpha^*) - \mathrm{Re} f(\alpha x \alpha^*)$$

で定義する.

正の数 $c > 0$ に対して $ce_{\alpha,x} = e_{\sqrt{c}\alpha,x}$, また

$$e_{\alpha,x} + e_{\alpha',x'} = e_{\alpha'',x''}$$

となるから $\mathcal{E}$ は cone になる, ただし

$$\alpha'' = [\alpha \quad \alpha'], \qquad x'' = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x' \end{bmatrix}.$$

$\mathcal{E}$ の任意の元 $e = e_{\alpha,x}$ に対して

$$p_e(\alpha\alpha^*) = \|\alpha\alpha^*\| = \|\alpha\|^2$$

となる $p_e \in S_n$ を選ぶ．このとき $\mathcal{W}_n(\alpha x\alpha^*) \leq \|\alpha\|^2$, $\mathcal{W}_n^*(f) = 1$ だから

$$e_{\alpha,x}(p_e) = \|\alpha\|^2 - \mathrm{Re} f(\alpha x\alpha^*) \geq 0$$

となる．従って前の補題より，上の条件を満たす p_0 の存在が導かれる．

C*-環の表現定理は状態から GNS 表現を作り，その表現達の直和を取ると，状態達でもとの C*-環を分離できるので，faithful な表現が構成できるというものであった．基本的な考え方は同じで，上の補題を用いて次の事実を示す．

補題 $\mathcal{W}_n^*(f) = 1$ である $f \in M_n(X)$ に対して $\mathcal{W}$-complete contraction $\varphi : X \longrightarrow M_n$ と単位ベクトル $\xi \in (\mathbb{C}^n)^n$ が存在して

$$f(x) = (\varphi_n(x)\xi, \xi) \qquad x \in M_n(X)$$

が成立する．

各 $x \in M_n(X)$ に対して Hahn-Banach の定理で

$$f_x(x) = \mathcal{W}_n(x)$$

となる $f_x \in M_n(X)^*$, $\mathcal{W}_n^*(f_x) = 1$ が選べる．この f_x に対して補題を適用して $\mathcal{W}$-complete contraction $\varphi_x : X \longrightarrow M_{n(x)}$ と単位ベクトル $\xi_x \in (\mathbb{C}^n)^n$ が存在して

$$f_x(y) = ((\varphi_x)_n(y)\xi_x, \xi_x) \qquad y \in M_n(X)$$

とできる．このとき

$$w_n((\varphi_x)_n(x)) \geq ((\varphi_x)_n(x)\xi_x, \xi_x) = f_x(x) = \mathcal{W}_n(x)$$

となる．φ_x は $\mathcal{W}$-complete contraction, つまり

$$w_m((\varphi_x)_m(y)) \leq \mathcal{W}_m(y) \quad \text{for all } m \in \mathbb{N}, y \in M_m(X)$$

だから $w_n((\varphi_x)_n(x)) = \mathcal{W}_n(x)$ となることがわかる．つまり部分的には Numerical radius operator space のノルム $\mathcal{W}_n$ が，ヒルベルト空間上の作用素の数域半径と同じにできる．

従って Main Theorem の主張は上のようなものを掻き集めれば実現できるということになる．実際

$$H = \oplus_{x \in \cup_n M_n(X)} \mathbb{C}^{n(x)}$$

として

$$\Phi : X \ni y \mapsto (\varphi_x(y))_x \in \oplus_{x \in \cup_n M_n(X)} M_{n(x)} \subset B(H)$$

という表現を考えれば良い．

従って最後の補題を示せば Main Theorem がしたがうことになるので，その証明に入ります．

$f \in M_n(X)^*$, $\mathcal{W}_n^*(f) = 1$ に対して

$$|f(\alpha x\alpha^*)| \leq p_0(\alpha\alpha^*)\mathcal{W}_r(x)$$

$(r \in \mathbb{N},\ \alpha \in M_{n,r},\ x \in M_r(X))$ となる $p_0 \in S(M_n)$ が存在することを示した．このとき任意の $t > 0$ に対して

$$|f(\alpha x \beta)| = |f([t\alpha\ \beta^*/t] \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} [t\alpha\ \beta^*/t]^*)|$$
$$\leq p_0(t^2 \alpha\alpha^* + \beta^*\beta/t^2) \mathcal{W}_{2n} \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

が成立するので

$$|f(\alpha x \beta)| \leq 2 p_0(\alpha\alpha^*)^{1/2} p_0(\beta^*\beta)^{1/2} \mathcal{W}_{2n} \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．

この $p_0 \in S_n$ に対して GNS 構成により有限次元ヒルベルト空間への表現 $\pi : M_n \longrightarrow B(H)$ と単位ベクトル $\xi_0 \in H$ で

$$p_0(\alpha) = (\pi(\alpha)\xi_0, \xi_0) \qquad \alpha \in M_n$$

とできる．$\mathbb{C}^n$ から M_n への埋め込みを

$$\mathbb{C}^n \ni \alpha = [\alpha_1, \cdots, \alpha_n] \mapsto \tilde{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in M_n$$

とし，H の部分空間 $H_0 = \{\pi(\tilde{\alpha})\xi_0 \mid \alpha \in \mathbb{C}^n\}$ とする $(\dim H_0 \leq n)$．この H_0 上の sesqui-linear form を

$$H_0 \times H_0 \ni (\pi(\tilde{\beta})\xi_0, \pi(\tilde{\alpha})\xi_0) \mapsto f(\alpha^* x \beta)$$

で定義する．well-defined であることと有界性は次の関係式からわかる．

$$|f(\alpha^* x \beta)| \leq 2 p_0(\alpha^*\alpha)^{1/2} p_0(\beta^*\beta)^{1/2} \mathcal{W} \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\leq 2 \|\pi(\tilde{\alpha})\xi_0\| \|\pi(\tilde{\beta})\xi_0\| \mathcal{W} \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Riesz の定理を用いると

$$f(\alpha^* x \beta) = (\varphi_0(x)\pi(\tilde{\beta})\xi_0, \pi(\tilde{\alpha})\xi_0)$$

となる $\varphi_0(x) \in B(H_0)$ が得られる．$\dim H_0 \leq n$ であったから H_0 を $\mathbb{C}^n$ の部分空間とみなし，H_0 への射影を e とすると

$$\varphi : X \ni x \mapsto \varphi(x) = \varphi_0(x) e \in M_n$$

で

$$f(\alpha^* x \beta) = (\varphi(x)\pi(\tilde{\beta})\xi_0, \pi(\tilde{\alpha})\xi_0)$$

となる．この φ が補題の条件を満たしていることを見ていく．

$e_i = [0, \cdots, \overbrace{1}^{i}, \cdots, 0] \in \mathbb{C}^n$ に対して $\tilde{e_i} = e_{1i} \in M_n$ であるから

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i,j} f(e_{i1}(x_{ij} \otimes e_{11})e_{1j}) \\ &= \sum_{i,j} (\varphi(x_{ij})\pi(\tilde{e_j})\xi_0, \pi(\tilde{e_i})\xi_0) \\ &= (\varphi_n(x) \begin{pmatrix} \pi(\tilde{e_1})\xi_0 \\ \vdots \\ \pi(\tilde{e_n})\xi_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi(\tilde{e_1})\xi_0 \\ \vdots \\ \pi(\tilde{e_n})\xi_0 \end{pmatrix}) \end{aligned}$$

となる．したがって $\xi = \begin{pmatrix} \pi(\tilde{e_1})\xi_0 \\ \vdots \\ \pi(\tilde{e_n})\xi_0 \end{pmatrix} \in (\mathbb{C}^n)^n$ とおくと

$$\|\xi\|^2 = \sum_i \|\pi(\tilde{e_i})\xi_0\|^2 = \sum_i \|\pi(e_{1i})\xi_0\|^2 = \sum_i p_0(e_{ii}) = 1.$$

である．

最後に φ が $\mathcal{W}$-complete contraction であることを示す．$m \in \mathbb{N}$ に対して

$$\mathcal{W}(\varphi_m) = \sup\{w_m(\varphi_m(x)) \mid x \in M_m(X), \mathcal{W}_m(x) = 1\}$$

とおく．$m > n$ のとき $\eta \in \mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n$ に対して等距離作用素 $\beta : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m$ と $\tilde{\eta} \in \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$ で

$$(\beta \otimes 1_n)\tilde{\eta} = \eta$$

となるものが取れる ([2:Lemma 2.2.1])．

もし $m > n$ で $\mathcal{W}(\varphi_m) > \mathcal{W}(\varphi_n)$ とする．このとき $\epsilon > 0$ に対して $x \in M_m(X)$, $\mathcal{W}_m(x) = 1$, $\eta \in (\mathbb{C}^n)^m$ で

$$\mathcal{W}(\varphi_m) - \epsilon < |(\varphi_m(x)\eta, \eta)|$$

とできる．このとき

$$\begin{aligned} |(\varphi_m(x)\eta, \eta)| &= |((\varphi_m(x)(\beta \otimes 1_n)\tilde{\eta}, (\beta \otimes 1_n)\tilde{\eta})| \\ &= (\beta^* \varphi_m(x)\beta\tilde{\eta}, \tilde{\eta}) \\ &= (\varphi_n(\beta^* x \beta)\tilde{\eta}, \tilde{\eta}) \leq \mathcal{W}(\varphi_n) \end{aligned}$$

となり矛盾．

したがって $\mathcal{W}(\varphi_n) \leq 1$ を示せば $\mathcal{W}$-complete contraction であることがわかる．

$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}^n$ とし $\eta = \begin{pmatrix} \pi(\tilde{\alpha_1})\xi_0 \\ \vdots \\ \pi(\tilde{\alpha_n})\xi_0 \end{pmatrix}$ が単位ベクトルであるとする. $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in M_n$ とおくと

$$1 = \|\eta\|^2 = \sum_i \|\pi(\tilde{\alpha_i})\xi_0\|^2 = \sum_i p_0(\alpha_i^* \alpha_i) = p_0(\alpha^* \alpha)$$

となる. このとき

$$\begin{aligned} |(\varphi_n(x)\eta, \eta)| &= |\sum_{i,j}(\varphi(x_{ij})\pi(\tilde{\alpha_j})\xi_0, \pi(\tilde{\alpha_j})\xi_0)| = |\sum_{i,j} f(\alpha_i^* x_{ij} \alpha_j)| \\ &= |f(\alpha^* x \alpha)| \leq p_0(\alpha^* \alpha)\mathcal{W}_n(x) = \mathcal{W}_n(x) \end{aligned}$$

となり $\mathcal{W}(\varphi_n) \leq 1$ であることがわかる.

参考文献

[1] T. Itoh and M. Nagisa, *Numerical radius norms on operator spaces*, preprint.

[2] E. G. Effros and Z.-J. Ruan, Operator Spaces, London Math. Soc. Monographs New Ser. 23, 2000.